4.12.02 ①

Praefixrelation: Sei C ein Alphabet und C^* die Menge aller Zeichensequenzen. Dann heißt $z \in C^*$ ein Praefix von x, wenn gilt:

$$\exists y \in C^* : x = z \circ y$$

(Beispiel: ab ist Präfix von abc

Spezielle Relationen:

Eine zweistellige Relation $\varrho \subseteq M \times M$ sei gegeben, dann heißt ϱ

- reflexiv, wenn $\forall x \in M: x \varrho x$
  (Beispiel: Gleichheit)
- transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M$
  $(x \varrho y) \wedge (y \varrho z) \Rightarrow x \varrho z$
- symmetrisch, wenn
  $\forall x, y \in M: x \varrho y \Rightarrow y \varrho x$
  (Bsp: „=" ist symmetrisch,
  „<' ist nicht ")
- antisymmetrisch, wenn
  $\forall x, y \in M: (x \varrho y) \wedge (y \varrho x) \Rightarrow x = y$

- Eine Relation heißt eine partielle (Halb)-ordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

• totale Ordnung: Eine partielle Ordnung, in der alle Elemente miteinander vergleichbar sind. ②

Beispiele: Die Relation „≤" über $\mathbb{N}$ ist eine totale Ordnung. Die Präfixrelation ist nur partiell.

Minimale Elemente und kleinste Elemente

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $S \subset P$. Dann heißt $m \in S$ minimal, wenn es kein $n \in S$ $(n \neq m)$ gibt mit $n \sqsubseteq m$. Gilt $m \sqsubseteq n$ $\forall n \in S$, dann ist m kleinstes Element.

Beispiele:

- Über $\mathbb{N}$ ist bzgl. der Relation „≤" für alle Teilmengen ein kleinstes Element vorhanden
- Sei C ein Alphabet und C^* die Menge der Wörter. Dann ist bzgl. der Präfixrelation ε (leere Wort) kleinstes Element. In $C^+ := C^* \setminus \{\varepsilon\}$ gibt es kein kleinstes Element, minimale Elemente sind alle einelementigen Wörter.

Fundierte Ordnung:

Sei $(M, \leq)$ partielle Ordnung. Dann heißt $(M, \leq)$ fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge mindestens ein minimales Element hat.

Beispiel: Betrachte über $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Teilerrelation: $(a \mid b)$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : a \cdot c = b ;$$

und $T(b) := \{ a \in \mathbb{N} : a \mid b \}$

$\Rightarrow$ Es gibt in $T(b)$ Teilmengen ohne Kleinstes, jedoch mit minimalen Elementen

$T(24) = \{ 2, 3, 4, 6, 12, 8 \}$

$\uparrow \uparrow$

minimale Elemente in $T(b)$

Noethersche (fundierte) Induktion

Sei $(M, \leq)$ eine fundierte Ordnung über M und P eine Aussage für $x \in M$. Dann gilt P für alle $x \in M$, wenn

- (Ind-anf.) P gilt für alle minimalen Elemente
- für $x \in M$ gilt:
  - x ist nicht minimal
  - aus der Gültigkeit von P für alle y, mit $y \leq x$ die Gültigkeit von $P(x)$ folgt

Vorgehensweise:

- Konstruiere eine geeignet fundierte Ordnung über M
- Beweise P für alle minimalen Ele.
- Gib die Menge aller nicht minimalen Elemente an
- Zeige, daß $P(x) = true$ folgt, wenn $P(y) = true$ für alle $y \sqsubset x$.