9. 1. 2003

Anknüpfung: Häufig ist zu einer best. Sprache L, etwa $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid a^n b^n, n \in \mathbb{N}_0\}$, eine Beschreibung in BNF gegeben.

Problem: Wie läßt sich zeigen, daß ein gegebenes System von Produktionen, die Sprache L darstellt.

Beispiel (obiger Sprache):

$$\langle wort \rangle = (a \langle wort \rangle b) \mid \varepsilon \quad (*)$$

Stellt (*) die Sprache L dar?

Lösung: Die Produktion (*) wird als Gleichung für Mengen interpretiert. Bezeichne W die Menge der Wörter, die durch (*) produziert wird, dann erhalten wir folg. Mengengleichung:

$$W = \{\varepsilon\} \cup \{a x b,\ x \in W\}; \quad (**)$$

Es ergibt sich eine Gleichung, bei der die zu berechnende Menge W auf beiden Seiten der Glg. auftritt; es handelt sich um eine Gleichung bei der eine Abbildung f auf W angewandt wird und sich wiederum W ergibt, d.h. W ist bzgl. der Abb. f „fix". Wir erhalten eine Fixpunktglg. (vgl. Diffglg: $y' = y$)

Der Fixpunktsatz für stetige Funktionen

Einige math. Hilfsmittel:

Sei M eine Menge und $\leq$ eine Halbordnung, dann ist die Folge $(m_1, m_2, \ldots)$ mit $m_1 \leq m_2 \leq \ldots$ und $m_i \in M$ eine Kette.

Sei $N \subset M$, dann heißt $x \in M$

- Kleinstes Element (min M), wenn $x \leq M$, d.h. $\forall y \in M: x \leq y$.
- obere Schranke von N, wenn $x \geq N$.
- Supremum von N (sup N), wenn x kleinste obere Schranke von N ist.

Definition: (Vollständige Halbordnung)
M heißt vollständig halbgeordnet, wenn min M existiert und $\forall$ Ketten K das sup K existiert.

Beispiel:

- Gegeben $(P(U), \subseteq)$; mit min $(P(U))$ $= \emptyset$ und sup $K = U$ ist diese Menge vollst. halbgeordnet.

Weitere Definitionen

Monotonie: Gegeb. Halbordnungen $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$. Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt monoton, wenn aus $a \leq_A b$ folgt $f(a) \leq_B f(b)$.

Stetigkeit: Eine Abb. $f: A \to B$ heißt stetig, falls $\forall$ Ketten $(x_1, x_2, \dots) \subset A$ gilt
$$\sup_B \{f(x_k)\} = f(\sup_A \{x_k\})$$

Fixpunkt: Sei $\leq$ eine vollst. Halbordn. und $f: A \to A$. Ein $a \in A$ heißt ein Fixpunkt von f, wenn
$$f(a) = a,$$
und ein kleinster Fixpunkt, wenn $a \leq b$ für alle $f(b) = b$

Kleeneschen Fixpunktsatz:
Sei f stetig und eine vollst. Halbordn. der Menge A mit $f: A \to A$. Dann ist
$$\sup \{ f^i(\min A), i \in \mathbb{N} \}$$
der kleinste Fixpunkt von f. Dabei bedeutet „f^i" das i-fache Anwenden der Abbildung f auf $\min A$.

Anwendung des Fixpunktsatzes auf die Mengengleichung (**)
$$W = \{\varepsilon\} \cup \{a x b;\ x \in W\}$$
Wir betrachten die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$. Diese Menge ist bzgl. der Teilmengenrelation vollst. halbgeordnet. Kleinstes Element $\min(\{a,b\}^*)$ ist die leere Menge $\emptyset$.

Die im Kleeneschen Satz auftretende Abb. $f : A \to A$ ist gegeben durch

$$f(A) = \{\varepsilon\} \cup \{axb,\ x \in A\}$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung (**) ist eine Fixpunktgleichung: $W = f(W)$. Somit ist die Lösung von (**) das im Kl.-Satz beschriebene Sup.

$$L = \sup\{f^i(\emptyset);\ i \in \mathbb{N}\}$$

Vorgehensweise:

- Berechnung der Menge $\{f^i(\emptyset),\ i \in \mathbb{N}\}$
- Bestim. d. Supremums

Wir definieren:

$$W_0 := f^0(\emptyset) = \emptyset$$
$$W_i := f^i(\emptyset)$$
$$W_{i+1} = f^{i+1}(\emptyset) = f(\underline{f^i(\emptyset)})$$
$$\Rightarrow \underline{W_{i+1} = f(W_i)}$$

Konkrete Durchführung:

$i = 0$: $W_0 = \emptyset$

$i = 1$: $W_1 = f(W_0)$
$= \{\varepsilon\} \cup \{axb,\ x \in \emptyset\}$
$W_1 = \{\varepsilon\}$

$i = 2$: $W_2 = f(W_1)$
$W_2 = \{\varepsilon\} \cup \{axb,\ x \in \{\varepsilon\}\}$
$W_2 = \{\varepsilon\} \cup \{ab\} = \{\varepsilon, ab\}$

$i = 3$: $W_3 = f(W_2)$
$W_3 = \{\varepsilon\} \cup \{axb,\ x \in \{\varepsilon, ab\}\}$

$W_3 = \{\varepsilon\} \cup \{ab, a^2b^2\}$

$W_3 = \{\varepsilon, ab, a^2b^2\}$

$\vdots$

Man sieht: Nach der i-ten Berechnung sind alle Worte $a^{i-1}b^{i-1}$ dargestellt.

Bem: • Durch das beschriebene Verfahren läßt sich die durch ein System von BNF-Produktionen dargest. Sprache induktiv charakterisieren

• Das hier dargestellte Verfahren erfordert eine BNF; bei EBNF läßt sich nicht direkt eine Mengengl. formulieren.

• Vorgehens weis bei mehreren BNF-Prod.

$\langle A \rangle = a \langle A \rangle \mid a \langle B \rangle \mid \varepsilon$

$\langle B \rangle = b \langle B \rangle \mid \varepsilon$

$\Rightarrow \quad A = \{\varepsilon\} \cup \{ax,\ x \in A\} \cup \{ay,\ y \in B\}$

$\quad\quad B = \{\varepsilon\} \cup \{by,\ y \in B\}$

Die Abb. f hat also die Form

$$f : \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Starttupel: $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$

Weitere Beispiele für Grammatiken

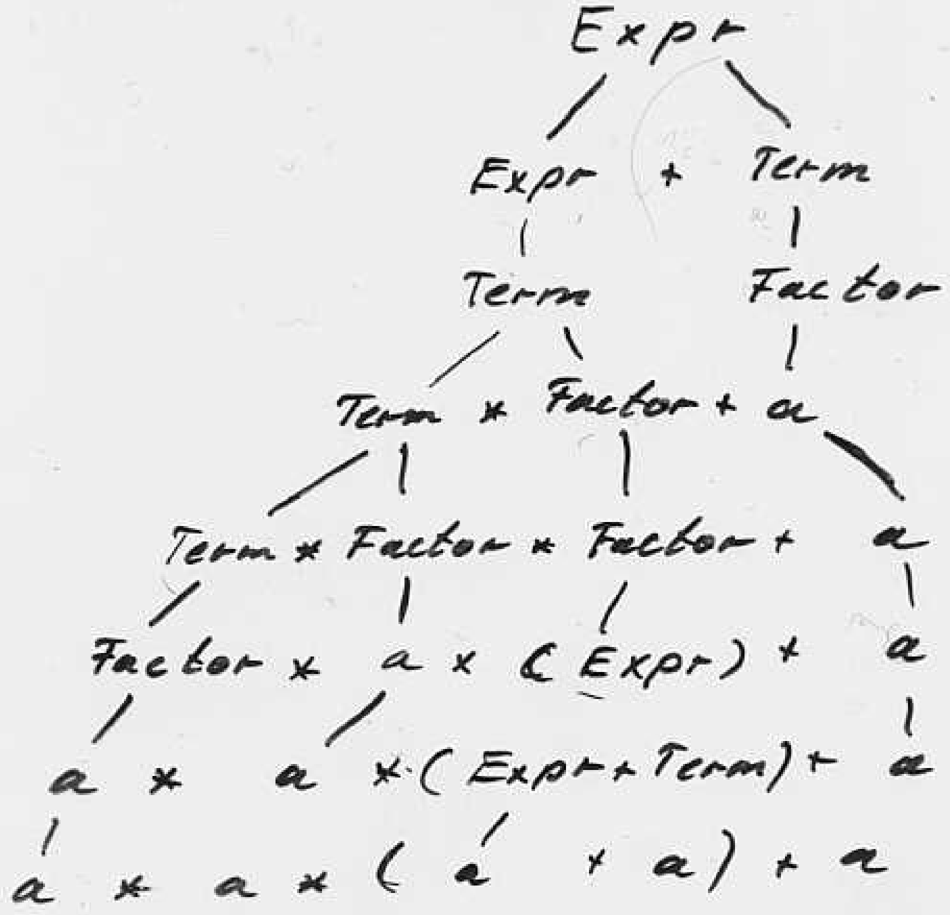
a.) Grammatik zur Beschreibung korrekt geklammerter arithm. Ausdrücke

$G = (\{Expr, Term, Factor\},$
$\{(,), a, +, *\},$
$P, Expr)$

P = { Expr = Term | Expr "+" Term.
Term = Factor | Term "*" Factor.
Factor = "a" | "(" Expr ")"
}

Daraus läßt sich beispielsweise folgender Ausdruck ableiten:

a * a * (a + a) + a



b.) $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S\}$

$P = \{ S = \text{"a"}BC \mid \text{"a"}SBC.$

$CB = BC.$

$\text{"a"}B = \text{"ab"}.$

$\text{"b"}B = \text{"bb"}.$

$\text{"b"}C = \text{"bc"}.$

$\text{"c"}C = \text{"cc"}.$

Mögliche Ableitung: Folgendes Wort soll abgeleitet werden: aaabbbccc.

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC$

$\Rightarrow aaaBCBCBC$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow aaaBBBCCC$

$\Rightarrow aaabBBCCC$

$\Rightarrow aaabbbCCC$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow aaabbbccc$