Technische Universität München
Fakultät für Informatik
M. Bauer, D. Golias, S. Riesner,
Dr. M. Schneider

WS 2002/2003
Lösungsvorschläge zu Blatt 10
10. Januar 2003

Übungen zu Einführung in die Informatik I

Aufgabe 35 Prädikatenlogische Ausdrücke über den natürlichen Zahlen (Lösungsvorschlag)

a)	y ist eine gerade Zahl	$\Leftrightarrow$	$T(2,y)$
b)	y ist eine Primzahl	$\Leftrightarrow$	$\forall\ \mathbf{nat}\ x : [T(x,y) \Rightarrow (x=1) \vee (x=y)]$
c)	x und y sind teilerfremd	$\Leftrightarrow$	$\forall\ \mathbf{nat}\ v : (T(v,x) \wedge T(v,y)) \Rightarrow v=1$
d)	z ist ggT von x und y	$\Leftrightarrow$	$T(z,x) \wedge T(z,y) \wedge (\forall\ \mathbf{nat}\ v : (T(v,x) \wedge T(v,y)) \Rightarrow v \le z)$

Aufgabe 36 Formulierung prädikatenlogischer Ausdrücke (Lösungsvorschlag)

Bei der Lösung dieser Aufgabe verwenden wir, da wir nur Elemente aus der Menge **D** aller Drachen betrachten, anstatt $\forall x \in \mathbf{D}$ bzw. $\exists x \in \mathbf{D}$, die abkürzende Schreibweise $\forall x$ bzw. $\exists x$.

a) Es ergeben sich folgende prädikatenlogische Ausdrücke:

(i) $\forall y [\forall x\ Ki(x,y) \Rightarrow Fl(x)] \Rightarrow Gl(y)$

(ii) $\forall x\ Gr(x) \Rightarrow Fl(x)$

(iii) $\forall x [\exists y\ Ki(x,y) \wedge Gr(y)] \Rightarrow Gr(x)$

b) Eine informelle Begründung könnte folgendermaßen beschaffen sein: Aus der Tatsache (iii) folgt, dass Kinder eines grünen Drachens grün sind. Mit (ii) ergibt sich, dass die Kinder grüner Drachen fliegen können. Da ein grüner Drachen glücklich ist, wenn alle seine Kinder (das beinhaltet auch den Fall, dass ein Drache keine Kinder hat) fliegen können (i) wir folgern, dass grüne Drachen glücklich sind.

c) Ausgangspunkt der Beweisführung ist die Tatsache (iii):

$$\begin{aligned}
& & & \forall x [\exists y\ Ki(x,y) \wedge Gr(y)] \Rightarrow Gr(x) \\
&\text{(Definition der Implikation)} &=\ & \forall x\ \neg[\exists y\ Ki(x,y) \wedge Gr(y)] \vee Gr(x) \\
&\text{(Bezieh. zwischen All- und Existenzquantor)} &=\ & \forall x [\forall y\ \neg(Ki(x,y) \wedge Gr(y))] \vee Gr(x) \\
&\text{(Weglassen der Klammern)} &=\ & \forall x \forall y\ \neg(Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \vee Gr(x) \\
&\text{(Definition der Implikation)} &=\ & \forall x \forall y\ (Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Gr(x) \\
&\text{(Vertauschen der Allquantoren)} &=\ & \forall y \forall x\ (Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Gr(x)
\end{aligned}$$

Wir haben bis jetzt den ersten Teil der informellen Begründung, –alle Kinder grüner Drachen sind grün–, formal begründet. Es gilt jedoch auch Tatsache (ii); wir können also weiter die Gültigkeit von

$$[\forall y \forall x\ (Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Gr(x)] \wedge [\forall x\ Gr(x) \Rightarrow Fl(x)]$$

folgern, was nach Zusammenfassen der Allquantoren de äquivalenten Ausdruck

$$\forall y \forall x\,((Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Gr(x)) \wedge (Gr(x) \Rightarrow Fl(x))$$

ergibt. Die Implikation ist eine transitive Operation, d.h. es gilt die Tautologie: $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (dies kann leicht algebraisch oder mit einer Wertetabelle gezeigt werden); somit können wir folgern:

$$\forall y \forall x (Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Fl(x). \quad (*)$$

Wir haben also gezeigt, dass die Kinder grüner Drachen fliegen können. Nun gilt zusätzlich noch die Tatsache (i), die wir mit dem Prädikat (*) zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & [\forall y \forall x\,(Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Fl(x)] \wedge [\forall y \forall x\,(Ki(x,y) \Rightarrow Fl(x)) \Rightarrow Gl(y)] \\ = \quad & \forall y \forall x\,((Ki(x,y) \wedge Gr(y)) \Rightarrow Fl(x)) \wedge ((Ki(x,y) \Rightarrow Fl(x)) \Rightarrow Gl(y)) \end{aligned}$$

zusammenfassen können. Mit der (etwas mühsamer, jedoch prinzipiell nicht schwierig zu beweisenden) Tautologie $[((a \wedge b) \Rightarrow c) \wedge ((a \Rightarrow c) \Rightarrow d)] \Rightarrow (b \Rightarrow d)$ folgern wir schließlich:

$$\forall y Gr(y) \Rightarrow Gl(y)$$

Das heißt, alle grünen Drachen sind glücklich!

Aufgabe 37 Prädikatenlogische Aussagen in PROLOG (Lösungsvorschlag)

Die Loesung ist hier als Prolog File aufgearbeitet. Dabei findet keine explizite Trennung der Einzelaufgaben statt.

```
% Die Art-Fakten:

        drache(fume).
        drache(grisu).
        ungeheuer(nessi).
        mensch(cedric).

% Die Verwandschaftsfakten:

        kind(grisu,fume).

        % Neue Person: pofume (Parent-Of-Fume)

        kind(fume, pofume).

        % Neue Person: ggfather (Great-Grandfather / Urahn)

        kind(pofume, ggfather).
        kind(nessi, ggfather).


% Alle gruenen Drachen koennen fliegen :

        fliegen(X) :- drache(X),gruen(X).
```

```
% X ist zufrieden mit Y

        zufrieden(X,Y) :- drache(X), kind(Y,X), fliegen(Y).

% Fume ist gruen. Und dann die Geburtsregel ...

        gruen(fume).
        gruen(X) :- drache(Y),kind(X,Y),gruen(Y).

/* Hier ist zu beachten, dass aufgrund der Tatsache, dass mehrere
Regeln fuer gruen existieren bei Anfragen an den Interpreter
auch mehrfache Ausgaben angeboten werden:

        | ?- gruen(fume).
        true ?

Die Eingabe von a :

        true ? a

ergibt die alternativen Ausgaben, hier keine :

        no
        | ?-

*/

/* Wer ist mit wem zufrieden ... */

        | ?- zufrieden(fume,grisu).

        true ? a

        no

        | ?-  zufrieden(grisu,fume).

        no

% X ist Vorfahr von Y
% Mit einer rekursiven Definition reicht das Praedikat Kind:

        vorfahr(V,N) :- kind(N,V).
        vorfahr(V,N) :- kind(N,Person),vorfahr(V,Person).

/* Entsprechende Anfragen an die Datenbank ...

        | ?- vorfahr(X,grisu).
        X = fume ? a
        X = pofume
```

```
        X = ggfather
        no

        | ?- vorfahr(ggfather,X).
        X = pofume ? a
        X = nessi
        X = grisu
        X = fume
        no
*/
```

Und schliesslich die Suche nach einer Verwandschaftsbeziehung:

Diese ist dann gegeben, wenn es eine Person gibt, die Vorfahr
f"ur die zu Pr"ufenden gibt.

```
        verwandt(A,B) :- vorfahr(Person,A),vorfahr(Person,B).
```

Da wir allerdings von einer endlichen Historie ausgehen
(Adam und Eva ...), m"ussen wir eine zus"atzliche Regel aufnehmen,
die diesen Abschluss ber"ucksichtigt. Im Beispiel w"are sonst niemand
direkt mit \emph{ggfather} verwandt.

```
        verwandt(A,B) :- vorfahr(A,B).
verwandt(A,B) :- vorfahr(B,A).
```