

©ITS automotive nord e.V. – Braunschweig, Germany 2017. Personal use of this material is permitted. Permission from ITS automotive nord e.V. must be obtained for all other uses, in any current or future media, including reprinting/republishing this material for advertising or promotional purposes, creating new collective works, for resale or redistribution to servers or lists, or reuse of any copyrighted component of this work in other works.

Appeared in: ITS automotive nord e.V. (Hrsg.) *AAET – Automatisiertes und vernetztes Fahren, Beiträge zum gleichnamigen 18. Braunschweiger Symposium vom 8. und 9. Februar 2017*. ISBN: 978-3-937655-41-3.

Kooperative Bewegungsplanung autonomer Fahrzeuge unter Verwendung von Manöver-Templates

Stefanie Manzinger¹, Marion Leibold² und Matthias Althoff¹

Lehrstuhl für Echtzeitsysteme und Robotik¹
Technische Universität München, 85748 Garching bei München,

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik²
Technische Universität München, 80333 München,
{stefanie.manzinger}@in.tum.de, {marion.leibold, althoff}@tum.de

Zusammenfassung

Dieser Beitrag berichtet über eine Methode zur Auswahl kooperativer Fahrstrategien für automatisierte Kraftfahrzeuge. Hierzu wird ein neues Konzept basierend auf *Manöver-Templates* vorgestellt, welche kooperative Fahrstrategien repräsentieren. Auf der Grundlage von Manöver-Templates werden unsichere kooperative Fahrstrategien identifiziert und anschließend verworfen, wodurch sich die Anzahl möglicher Fahrmanöver verringert, so dass man sich auf verbleibende Optionen konzentrieren kann. Numerische Beispiele zeigen, dass sich mit der vorgestellten Methode die Rechenzeiten für kooperative Manöver verkürzen lassen.

1 Einleitung

Durch den Fortschritt moderner Kommunikationstechnologien ist die Weiterentwicklung kooperativer Fahrsysteme auf dem Vormarsch. Die Vernetzung mehrerer Fahrzeuge eröffnet neue Wege den Straßenverkehr effizienter zu gestalten. Ein bekanntes System zur Verbesserung des Verkehrsflusses bei gleichzeitiger Reduzierung des Kraftstoffverbrauches ist Platooning [3, 20], bei dem Fahrzeuge dicht hintereinander in Kolonnen fahren. Nicht nur außerhalb werden kooperative Fahrzeuge den heutigen Straßenverkehr revolutionieren, sondern auch innerorts. Ein Schwerpunkt heutiger Forschung liegt auf dem Verkehrsmanagement kooperativer Fahrzeuge an Kreuzungen, um einen störungsfreien Ablauf des Straßenverkehrs bei erhöhtem Durchsatz zu gewährleisten [5, 6, 14, 15].

Neben Verkehrsflussoptimierung wird kooperatives Fahren einen bedeutenden Beitrag zur Erhöhung der Sicherheit im Straßenverkehr leisten. Insbesondere in komplexen Gefahrensituationen zeigt sich das enorme Potenzial

kooperierender Systeme. Häufig lassen sich Unfälle, die durch ein einzelnes Fahrzeug nicht mehr verhindert werden können, durch koordinierte Fahrmanöver vermeiden. Hierbei muss jedoch innerhalb einer kurzen verbleibenden Zeitspanne ein gemeinsames Fahrmanöver gefunden werden, um die Gefahr sicher abzuwenden. Dies stellt eine große Herausforderung an Bewegungsplanungsalgorithmen dar, da mit steigender Anzahl an Fahrzeugen die Rechenkomplexität exponentiell ansteigt: Betrachtet man m kooperative Fahrzeuge, die n zulässige Aktionen ausführen können, erhält man n^m mögliche kombinierte Aktionen.

Um die Effizienz herkömmlicher Bewegungsplanungsalgorithmen für mehrere Fahrzeuge zu erhöhen, stellt dieser Beitrag einen neuartigen Ansatz zur Eingrenzung möglicher kooperativer Fahrmanöver auf Strategieebene mit Fokus auf Notfallsituationen vor. Um die Anzahl möglicher Fahrstrategien zu reduzieren, wird bewiesen, dass gemeinsame Fahrmanöver in der aktuellen Verkehrssituation unsicher sind. So wird z.B. verifiziert, dass ein kollektives Bremsmanöver nicht durchführbar ist, aber ein kooperatives Spurwechselmanöver einen Unfall abwenden kann. Im Zuge dessen werden diverse Fahrstrategien formalisiert, welche im Folgenden als *Manöver-Templates* bezeichnet werden. Für diese werden beweisbare Bedingungen hergeleitet, um nicht ausführbare Manöver-Templates zu verwerfen, so dass ein Bewegungsplanungsalgorithmus diese Strategien ignorieren kann. Manöver-Templates können ein Bewegungsplanungsmodule nicht ersetzen, jedoch können sie unabhängig von dem angewendeten Bewegungsplanungsalgorithmus eingesetzt werden. Aus diesem Grund werden im Folgenden verschiedene allgemeine Konzepte zur Bewegungsplanung mehrerer Fahrzeuge vorgestellt.

Zuallererst werden Ansätze basierend auf Variationsrechnung präsentiert. Frese et al. [10] stellen die Methode der elastischen Bänder zur kooperativen Unfallvermeidung vor, bei der virtuelle Kräfte optimiert werden. In [19] wird das Bewegungsplanungsproblem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm dargestellt, wobei die Bedingungen zur Kollisionsvermeidung mit Hilfe ganzzahliger Variablen modelliert werden. Dies ist jedoch mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden. In [21] werden kooperative Ausweichmanöver zur Unfallvermeidung und -minderung als numerisches Optimierungsproblem formuliert, wobei zur Vereinfachung des Problems nur die laterale Bewegung der Fahrzeuge berücksichtigt wird. Dabei wird das Problem in einzelne, unabhängige Teiloptimierungsprobleme zerlegt, um die Berechnung zu parallelisieren.

Eine weitere häufig angewendete Technik zur kooperativen Bewegungsplanung sind Baumsuchalgorithmen, die eine Diskretisierung des kontinuierlichen Zustandsraumes voraussetzen. In [9] ist die Menge an zulässigen Handlungen eines Fahrzeuges auf wenige extreme Manöver limitiert, wie z.B. Vollbremsung

und maximales Ausweichen nach links. Zur Beschleunigung des Baumsuchverfahrens kommen Branch-and-Bound-Strategien zum Einsatz. Lenz et al. [16] planen auf Basis des Monte-Carlo-Baumsuchverfahrens kooperative Manöver auf Autobahnen und Landstraßen, wobei keine explizite Kommunikation zwischen den Verkehrsteilnehmern notwendig ist.

2 Problemstellung und Methodik

Auf der Grundlage von Manöver-Templates werden kooperative Fahrstrategien formalisiert. Dabei setzt sich ein Manöver-Template aus einem Modell M und einer Menge an Nebenbedingungen C zusammen. Durch die Wahl der Nebenbedingungen C ergeben sich dabei verschiedene Kooperationsstrategien.

Definition 1 (Manöver-Template) *Ein Manöver-Template T wird als Tupel $T = (M, C)$ dargestellt, wobei M ein Modell und C eine Menge von Nebenbedingungen repräsentiert:*

- *Ein Modell M setzt sich aus dem Tupel $M = (f, Z_0, \mathcal{U})$ zusammen. Dabei repräsentiert f die rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{z} = f(z(t), u(t))$, die die kontinuierliche Dynamik mehrerer Verkehrsteilnehmer beschreibt. Hierbei stellt z den Zustandsvektor, u den Steuervektor und t die Zeit dar. Alle möglichen initialen Zustände und Eingänge des Systems sind durch folgende Mengen beschränkt: $z_0 \in Z_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\forall t : u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$.*
- *Die diskrete Menge an Nebenbedingungen $C = \{C_1(z, u), \dots, C_p(z, u)\}$ beinhaltet individuelle Nebenbedingungen $C_i(z, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ die bei gegebenen Zustand z und Steuervektor u die Werte true oder false annehmen.*

Des Weiteren wird die Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = f(z(t), u(t))$ als $\chi(t; z_0, u(\cdot))$ eingeführt, wobei sich $u(\cdot)$ auf die Steuertrajektorie bezieht. Die Menge an Lösungen eines Manöver-Templates ist

$$\begin{aligned} Z(t) = \{ & \chi(t; z_0, u(\cdot)) \mid z_0 \in Z_0, \forall t : u(t) \in \mathcal{U}, \\ & \forall i \forall t : C_i(\chi(t; z_0, u(\cdot)), u(t)) = \text{true} \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ausgehend von der momentanen Verkehrssituation soll überprüft werden, ob die Lösungsmenge $Z(t)$ des Manöver-Templates T für einen gegebenen Anfangszustand z_0 leer ist $Z(t) = \emptyset$. Dies würde bedeuten, dass eine Fahrstrategie korrespondierend zu Manöver-Template T nicht durchführbar ist.

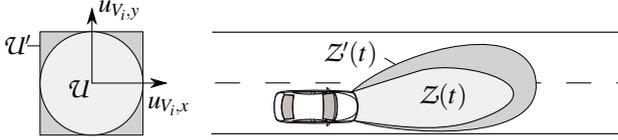


Abbildung 1: Vergrößerung der Lösungsmenge $Z(t)$ durch Überapproximation des Kammschen Kreises.

In diesem Beitrag wird unter Verwendung von Optimalsteuerungstheorie die Menge $Z(t)$ eines Manöver-Templates bestimmt. Hierfür wird die Menge $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{A}$ weiter unterteilt in die Menge der Anfangsbedingungen $\mathcal{B} = \{b_1(z_0, t_0), \dots, b_k(z_0, t_0)\}$, die Menge der Zustandsnebenbedingungen $\mathcal{H} = \{h_1(z(t), t), \dots, h_j(z(t), t)\}$ und die Menge der Endbedingungen $\mathcal{A} = \{a_1(z(t_f), t_f), \dots, a_i(z(t_f), t_f)\}$. Die Lösungsmenge $Z(t)$ ist durch folgendes Randwertproblem gegeben (äquivalent zu (1)):

$$\dot{z} = f(z(t), u(t)), \quad z_0 \in \mathcal{Z}_0, \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad (2a)$$

$$\forall k: b_k(z_0, t_0) \leq 0 \vee b_k(z_0, t_0) = 0, \quad (2b)$$

$$\forall i: a_i(z(t_f), t_f) \leq 0 \vee a_i(z(t_f), t_f) = 0, \quad (2c)$$

$$\forall t \forall j: h_j(z(t), t) \leq 0 \vee h_j(z(t), t) = 0. \quad (2d)$$

Zusätzlich wird folgende Kostenfunktion eingeführt:

$$\min S(z(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(z(t), u(t), t) dt. \quad (3)$$

Neben Optimalsteuerungstheorie kommt eine weitere Methodik zur Bestimmung von $Z(t)$ zum Einsatz. Zur vereinfachten Berechnung von $Z(t)$, wird diese Menge überapproximiert (siehe Abb. 1). Dies bedeutet, dass eine Menge $Z'(t)$ bestimmt wird, so dass $Z(t) \subset Z'(t)$ gilt. Die Überapproximation der Lösungsmenge $Z(t)$ erfolgt durch das Entfernen von Nebenbedingungen C_i oder auch durch lockern der kinematischen Nebenbedingungen an Modell M [1]. Auf Grund der Überapproximation gilt $Z'(t) = \emptyset \Rightarrow Z(t) = \emptyset$, so dass Manöver-Templates trotz Überapproximation verworfen werden können.

3 Bewegungsplanung mit Manöver-Templates

Der allgemeine Einsatz von Manöver-Templates im Zusammenhang mit Bewegungsplanungsalgorithmen wird beispielhaft anhand eines Szenarios erklärt,

welches in Abb. 2 visualisiert ist. Fahrzeug V_1 muss die Fahrspur wechseln, um einen Auffahrunfall mit Hindernis O_1 zu vermeiden. Die Fahrzeuge V_2 und V_3 kooperieren dabei mit Fahrzeug V_1 . Es stehen vier offline generierte Manöver-Templates T_A , T_B , T_C und T_D zur Auswahl, wobei jedes Manöver-Template verschiedene kooperative Fahrstrategien repräsentiert. Um eine Vorauswahl einer Fahrstrategie zu treffen, werden drei Schritte ausgeführt: *Matching*, *Feasibility* und *Selection*.

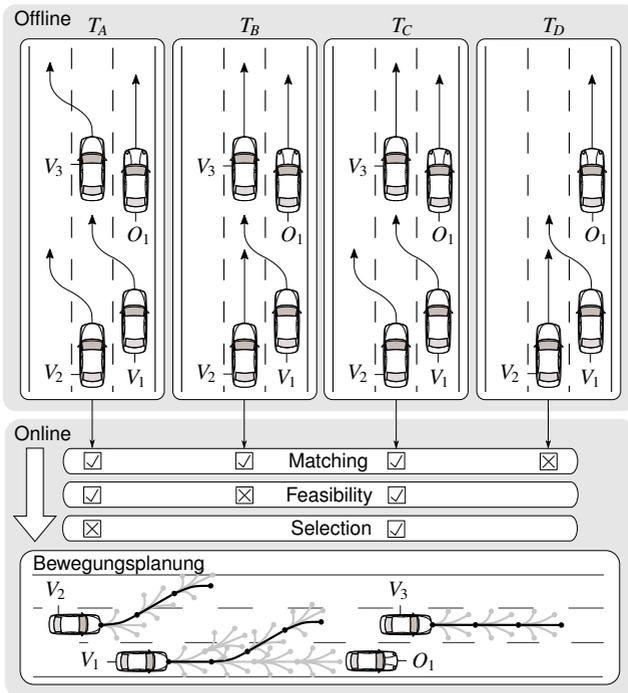


Abbildung 2: Prinzipieller Ablauf von Bewegungsplanung mit Manöver-Templates.

Zuallererst wird überprüft, ob die aktuelle Verkehrssituation den zulässigen Anfangsbedingungen $b_k(z_0, t_0)$ der Manöver-Templates T genügt (Matching). Das Matching ergibt, dass die aktuelle Verkehrssituation mit den Voraussetzungen der Manöver-Templates T_A , T_B und T_C übereinstimmt. Dahingegen wird Manöver-Template T_D verworfen, da die Anzahl an kooperativen Fahrzeugen nicht korrespondiert.

Anschließend wird die Lösungsmenge $Z(t)$ für jedes Manöver-Template

unter Berücksichtigung der Anfangszustände z_0 der Verkehrsteilnehmer bestimmt (Feasibility). Alle Manöver-Templates, für die $Z(t) = \emptyset$ gilt, werden aussortiert. Manöver-Template T_B wird entfernt, da Fahrzeug V_2 nicht stark genug abbremsen kann, um Fahrzeug V_1 rechtzeitig einsichern zu lassen (siehe Abb. 2).

Alle übrigen Manöver-Templates werden in einem letzten Schritt bewertet, um die aussichtsreichste Fahrstrategie zu bestimmen. Die Lösungsmenge $Z(t)$ des Manöver-Templates mit den geringsten Kosten kann an den Bewegungsplanungsalgorithmus weitergeleitet werden, um z.B. den Suchraum für kooperative Manöver auf $Z(t)$ einzuschränken. In dem vorgestellten Szenario wird Manöver-Template T_C ausgewählt, worin Fahrzeug V_1 und V_2 einen Spurwechsel durchführen und Fahrzeug V_3 beschleunigt um eine Lücke für Fahrzeug V_1 zu öffnen.

In der Tat kann nicht garantiert werden, dass ein passendes Manöver-Template für jede mögliche Verkehrssituation bereitgestellt ist. Falls kein passendes oder durchführbares Manöver-Template für die aktuelle Verkehrssituation existiert, wird der Bewegungsplanungsalgorithmus ohne die Hilfe von Manöver-Templates ausgeführt. Jedoch bewegen sich Fahrzeuge meist in strukturierten Umgebungen, so dass zu erwarten ist, dass Verkehrsmuster häufig wiederkehren. Zhang et al. [23] haben in ihrer Arbeit gezeigt, dass eine geringe Anzahl an Verkehrsmustern ausreicht um den Großteil aller Verkehrsszenarios an Kreuzungen darzustellen. Dies weist darauf hin, dass eine angemessene Zahl an Manöver-Templates genügt, um eine Vielzahl an Verkehrssituationen abzudecken.

Im weiteren Verlauf des Beitrages wird beispielhaft ein Manöver-Template für kooperative Kollisionsvermeidung auf Autobahnen, basierend auf den nachfolgend vorgestellten Fahrzeug- und Hindernismodellen, hergeleitet. Es wird vorausgesetzt, dass der Straßenverlauf gerade ist und nicht-kooperierende Verkehrsteilnehmer auf ihrer Fahrspur bleiben. Die Einbettung von Manöver-Templates in einen Bewegungsplanungsalgorithmus wird beispielhaft für einen Baumsuchalgorithmus präsentiert.

4 Fahrzeug- und Hindernismodell

Wie in Kap. 2 beschrieben, wird die Fahrzeugkinematik vereinfacht, um die Bestimmung der Menge $Z(t)$ zu erleichtern. Die Dynamik des i -ten kooperativen

Fahrzeugs wird als Doppelintegrator modelliert:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{V_{i,x}}(t) &= v_{V_{i,x}}(t), & \dot{v}_{V_{i,x}}(t) &= u_{V_{i,x}}(t), \\ \dot{s}_{V_{i,y}}(t) &= v_{V_{i,y}}(t), & \dot{v}_{V_{i,y}}(t) &= u_{V_{i,y}}(t), \end{aligned}$$

unter Verwendung von Position $(s_{V_{i,x}}(t), s_{V_{i,y}}(t))$, Geschwindigkeit $(v_{V_{i,x}}(t), v_{V_{i,y}}(t))$ und Steuervektor $(u_{V_{i,x}}(t), u_{V_{i,y}}(t))$. Die Fahrzeugdynamik wird in longitudinaler und lateraler Richtung entkoppelt, indem der Kammsche Kreis durch ein Rechteck überapproximiert wird (siehe Abb. 1):

$$\mathcal{U} = \{u_{V_{i,x}}(t), u_{V_{i,y}}(t) \in \mathbb{R} \mid \underline{u}_{V_{i,x}} \leq u_{V_{i,x}}(t) \leq \bar{u}_{V_{i,x}} \wedge \underline{u}_{V_{i,y}} \leq u_{V_{i,y}}(t) \leq \bar{u}_{V_{i,y}}\},$$

wobei $\underline{u}_{V_{i,x}}, \underline{u}_{V_{i,y}} \in \mathbb{R}^{<0}$ und $\bar{u}_{V_{i,x}}, \bar{u}_{V_{i,y}} \in \mathbb{R}^{>0}$ gelten. Die gemeinsame Dynamik N kooperativer Fahrzeuge ist

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{V_{1,x}}(t) \\ v_{V_{1,x}}(t) \\ s_{V_{1,y}}(t) \\ v_{V_{1,y}}(t) \\ \vdots \\ v_{V_{N,y}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}(t)} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{V_{1,x}}(t) \\ u_{V_{1,y}}(t) \\ \vdots \\ u_{V_{N,y}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}.$$

Die Dynamik des j -ten nicht-kooperativen Fahrzeugs wird als Doppelintegrator mit konstanter Beschleunigung modelliert ($u_{O_{j,x}} = \text{konst.}$). Dabei wird beachtet, dass Fahrzeuge, die zum Stillstand gekommen sind, nicht rückwärts beschleunigen. Die longitudinale Dynamik des j -ten Hindernisses ist somit

$$\forall u_{O_{j,x}} \in \mathbb{R}^{<0}: \quad s_{O_{j,x}}(t) = \begin{cases} s_{O_{j,x}}(t_0) + v_{O_{j,x}}(t_0)t + \frac{1}{2}u_{O_{j,x}}t^2, & t \leq t_{O_{j,stop}}, \\ s_{O_{j,x}}(t_{O_{j,stop}}), & t > t_{O_{j,stop}}, \end{cases}$$

$$t_{O_{j,stop}} = \left\lfloor \frac{v_{O_{j,x}}(t_0)}{u_{O_{j,x}}} \right\rfloor,$$

$$\forall u_{O_{j,x}} \in \mathbb{R}^{\geq 0}: \quad s_{O_{j,x}}(t) = s_{O_{j,x}}(t_0) + v_{O_{j,x}}(t_0)t + \frac{1}{2}u_{O_{j,x}}t^2,$$

unter der Benutzung von longitudinaler Position $s_{O_{j,x}}(t)$, Geschwindigkeit $v_{O_{j,x}}(t)$, Beschleunigung $u_{O_{j,x}}$ und Bremszeit $t_{O_{j,stop}}$ bis zum Stillstand.

Im Weiteren wird die räumliche Ausdehnung der kooperativen und nicht-kooperativen Fahrzeuge vernachlässigt. Die Fahrzeuge werden als Massenpunkt im Schwerpunkt der Fahrzeuggeometrie angenähert, was zu einer Überapproximation der Menge $\mathcal{Z}(t)$ führt.

5 Entwurf von Manöver-Templates

In diesem Kapitel wird beispielhaft das Manöver-Template *Kooperatives Einfädeln* konstruiert, welches ein kooperatives Spurwechselmanöver zur Kollisionsvermeidung repräsentiert (siehe Def. 2). Hierin muss Fahrzeug V_1 dem Hindernis O_1 ausweichen, da ein kollisionsfreies Bremsmanöver nicht mehr möglich ist (siehe Abb. 3). Fahrzeuge V_2 und V_3 öffnen eine Lücke, so dass Fahrzeug V_1 zwischen beiden Fahrzeugen einscheren kann. Weitere Manöver-Templates finden sich in [17].

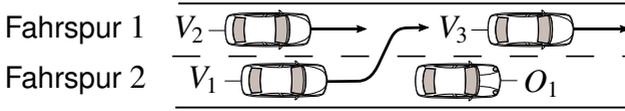


Abbildung 3: Manöver-Template *Kooperatives Einfädeln*.

Definition 2 (Kooperatives Einfädeln) Anfangsbedingungen: Die Menge an kooperativen Fahrzeugen ist $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ und die Menge an Hindernissen ist $O = \{O_1\}$. Fahrzeuge V_2 und V_3 befinden sich in Fahrspur 1, wohingegen sich Fahrzeug V_1 und das Hindernis O_1 in Fahrspur 2 aufhalten (siehe Abb. 3). Beide Fahrspuren haben die selbe Fahrtrichtung. Die initiale Geschwindigkeit jedes kooperativen Fahrzeuges ist durch folgende Nebenbedingungen eingeschränkt:

$$\begin{aligned} b_n(\mathbf{z}_0, t_0) &: -v_{V_n, x}(t_0) < 0, \quad \forall n \in \{1, 2, 3\}, \\ b_{p+3}(\mathbf{z}_0, t_0) &: v_{V_p, y}(t_0) = 0, \quad \forall p \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Die Fahrzeuge V_2 und V_3 halten den nötigen Sicherheitsabstand $s_{V_3, V_2}^{safe}(t_0)$ ein:

$$b_7(\mathbf{z}_0, t_0) : s_{V_2, x}(t_0) - s_{V_3, x}(t_0) + s_{V_3, V_2}^{safe}(t_0) \leq 0. \quad (4)$$

Das Hindernis O_1 befindet sich vor Fahrzeug V_1 , jedoch wird der Sicherheitsabstand nicht eingehalten:

$$b_8(\mathbf{z}_0, t_0) : s_{O_1, x}(t_0) - s_{V_1, x}(t_0) - s_{O_1, V_1}^{safe}(t_0) < 0.$$

Zustandsnebenbedingungen: Fahrzeug V_1 und Hindernis O_1 dürfen nicht kollidieren:

$$h_1(\mathbf{z}(t), t) : s_{V_1, x}(t) - s_{O_1, x}(t) \leq 0, \quad (5)$$

Die kooperativen Fahrzeuge dürfen nicht rückwärts fahren:

$$h_{j+1}(\mathbf{z}(t), t) : -v_{V_j, x}(t) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}.$$

Die Fahrzeuge V_2 und V_3 folgen der Fahrspur 1 für alle Zeiten:

$$h_5(\mathbf{z}(t), t) : v_{V_2, y}(t) = 0,$$

$$h_6(\mathbf{z}(t), t) : v_{V_3, y}(t) = 0.$$

Endbedingungen: Fahrzeug V_1 befindet sich zwischen den Fahrzeugen V_2 und V_3 und alle Fahrzeuge halten den Sicherheitsabstand ein:

$$a_1(\mathbf{z}(t_f), t_f) : s_{V_2, x}(t_f) - s_{V_1, x}(t_f) \leq 0, \quad (6)$$

$$a_2(\mathbf{z}(t_f), t_f) : s_{V_2, x}(t_f) - s_{V_1, x}(t_f) + s_{V_1, V_2}^{safe}(t_f) \leq 0, \quad (7)$$

$$a_3(\mathbf{z}(t_f), t_f) : s_{V_1, x}(t_f) - s_{V_3, x}(t_f) \leq 0, \quad (8)$$

$$a_4(\mathbf{z}(t_f), t_f) : s_{V_1, x}(t_f) - s_{V_3, x}(t_f) + s_{V_3, V_1}^{safe}(t_f) \leq 0. \quad (9)$$

Fahrzeug V_1 hat eine laterale Distanz w in Richtung Fahrspur 1 zurückgelegt und bewegt sich tangential zum Straßenverlauf:

$$a_5(\mathbf{z}(t_f), t_f) : s_{V_1, y}(t_f) - s_{V_1, y}(t_0) - w = 0,$$

$$a_6(\mathbf{z}(t_f), t_f) : v_{V_1, y}(t_f) = 0.$$

Anmerkung 1 Die Berechnung der Sicherheitsdistanz s^{safe} ist in [2] und [22] beschrieben. Dabei ist die Berechnung von s^{safe} abhängig von der Reihenfolge der Fahrzeuge. In Bedingung (7) wird angenommen, dass Fahrzeug V_1 vor Fahrzeug V_2 fährt. Jedoch ist es möglich, dass Ungleichung (7) erfüllt ist, obwohl Fahrzeug V_1 hinter Fahrzeug V_2 fährt, auf Grund des Vorzeichens von s_{V_1, V_2}^{safe} . Deshalb wird zusätzlich Gleichung (6) eingeführt. Dasselbe gilt für Gleichungen (8) und (9).

Um die Lösungsmenge $\mathcal{Z}(t)$ des Manöver-Templates zu bestimmen, wird folgendes zeitoptimales Steuerungsproblem betrachtet:

$$\min t_f \quad (10a)$$

unter Berücksichtigung von

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{z}_0 \in \mathcal{Z}_0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}', \quad (10b)$$

$$h_j(\mathbf{z}(t), t) \leq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}, \quad (10c)$$

$$h_k(\mathbf{z}(t), t) = 0, \quad k \in \{5, 6\}, \quad (10d)$$

$$a_i(\mathbf{z}(t_f), t_f) \leq 0, \quad i \in \{1, \dots, 4\}, \quad (10e)$$

$$a_l(\mathbf{z}(t_f), t_f) = 0, \quad l \in \{5, 6\}. \quad (10f)$$

Das Optimalsteuerungsproblem wird mit Hilfe des Minimum Prinzips von Pontryagin gelöst. Dabei werden folgende Annahmen getroffen:

Annahme 1 Die Menge $Z^K(t)$ der Lösungskandidaten $\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)\}$ des Optimalsteuerungsproblems (10a)-(10f), gegeben durch die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, ist genau dann $Z^K(t) = \emptyset$, wenn $Z(t) = \emptyset$ gilt.

Annahme 2 Singuläre Lösungsanteile werden ausgeschlossen [7, 18].

Annahme 3 Die Eintrittspunkte eines Randstücks und Kontaktpunkte sind für alle Zustandsnebenbedingungen $h_i(\mathbf{z}(t), t)$ verschieden.

Annahme 4 Jede Zustandsnebenbedingung $h_i(\mathbf{z}(t), t)$ ist maximal einmal innerhalb des Optimierungshorizonts $t \in [t_0, t_f]$ aktiv.

Eine detaillierte Studie zum Maximums Prinzip von Pontryagin kann in [12] gefunden werden.

Auf der Grundlage der notwendigen Optimalitätskriterien erster Ordnung können folgende Bedingungen für die Lösung des Optimalsteuerungsproblems angegeben werden:

Theorem 1 Gegeben ist das zeitoptimale Steuerungsproblem (10a)-(10f) und das korrespondierende Manöver-Template Kooperatives Einfädeln nach Def. 2. Ob $Z(t) = \emptyset$ gilt, kann durch folgende Steuereingänge der Fahrzeuge V_1 , V_2 und V_3 bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 u_{V_1,y}(t) & \begin{cases} = 0 & t \in [t_0, t_y], \\ \in \{\underline{u}_{V_1,y}, \bar{u}_{V_1,y}\} & t \in [t_y, t_f], \end{cases} & u_{V_1,x}(t) & \in \{\underline{u}_{V_1,x}, \bar{u}_{V_1,x}\} \\
 u_{V_2,y}(t) & = 0, & u_{V_2,x}(t) & = \begin{cases} \underline{u}_{V_2,x} & v_{V_2,x}(t) > 0, \\ 0 & v_{V_2,x}(t) = 0, \end{cases} \\
 u_{V_3,y}(t) & = 0, & u_{V_3,x}(t) & = \bar{u}_{V_3,x},
 \end{aligned}$$

wobei $u_{V_1,y}(t)$ und $u_{V_1,x}(t)$ für $t \in [t_y, t_f]$ respektive $t \in [t_0, t_f]$ ausschließlich Randwerte des mit \mathcal{U}' definierten zulässigen Bereiches annehmen (Bang-Bang Steuerung) und dabei maximal einen Schaltpunkt aufweisen.

Auf Grund der einfachen Struktur der Steuertrajektorien der Fahrzeuge V_1 , V_2 und V_3 nach Theorem 1 wird nachfolgend ein Suchalgorithmus basierend auf einer binären Suche verwendet, um festzustellen, ob $Z(t) = \emptyset$ gilt (siehe Abb. 2 Feasibility).

5.1 Durchführbarkeitsbewertung

Um festzustellen, ob $Z(t) \neq \emptyset$ für Manöver-Templates *Kooperatives Einfädeln* gilt, werden Steuereingänge nach Theorem 1 gesucht, so dass alle Nebenbedingungen \mathcal{C} erfüllt sind. Nach Theorem 1, muss Fahrzeug V_2 während des gesamten Manövers bremsen und Fahrzeug V_3 beschleunigen. Somit bleibt festzustellen, ob Umschaltzeitpunkte der lateralen und longitudinalen Bang-Bang Steuerung $u_{V_1,y}(t)$ bzw. $u_{V_1,x}(t)$, sowie ein Startzeitpunkt t_y des lateralen Ausweichmanövers des Fahrzeuges V_1 existieren, so dass alle notwendigen Bedingungen (10b)-(10f) erfüllt sind. Für eine gegebene Distanz w kann der Umschaltzeitpunkt der lateralen Bang-Bang Steuerung $u_{V_1,y}(t)$ analytisch bestimmt werden, so dass $a_5(\mathbf{z}(t_f), t_f)$ und $a_6(\mathbf{z}(t_f), t_f)$ erfüllt sind [1]. Der Umschaltzeitpunkt t_s der longitudinalen Bang-Bang Steuerung $u_{V_1,x}(t)$ und der Startzeitpunkt t_y des lateralen Ausweichmanövers werden mit Hilfe einer binären Suche bestimmt. Hierbei wird angenommen, dass t_s innerhalb des Intervalls $t_s \in [\underline{t}_s, \bar{t}_s]$ und t_y innerhalb des Intervalls $t_y \in [\underline{t}_y, \bar{t}_y]$ liegen, welche rekursiv eingegrenzt werden.

Die binäre Suche bietet den Vorteil, dass die Fahrzeuggeometrien miteinbezogen werden können. Zu diesem Zweck wird Nebenbedingung (5) des Manöver-Templates *Kooperatives Einfädeln* durch die Bedingung ersetzt, dass sich die Belegungsbereiche der drei kooperativen Fahrzeuge Ω_{V_n} und des Hindernisses Ω_{O_1} zu keinem Zeitpunkt überschneiden dürfen:

$$\forall t : \Omega_{V_1}(t) \cap \Omega_{V_2}(t) \cap \Omega_{V_3}(t) \cap \Omega_{O_1}(t) = \emptyset.$$

Die Fahrzeuggeometrien werden hierbei durch Rechtecke angenähert. In Kap. 4 wurden Punktmassen verwendet, was zu einer Überapproximation der Lösungsmenge $Z(t)$ führt, daher gilt Theorem 1 auch für die Annäherung der Fahrzeuggeometrie durch Rechtecke. Da Fahrzeug V_2 während des gesamten Manövers bremst, Fahrzeug V_3 durchgehend beschleunigt und beide Fahrzeuge zu Beginn des Manövers den Sicherheitsabstand einhalten (siehe Gleichung (4)), können Kollisionen zwischen den Fahrzeugen V_2 und V_3 ausgeschlossen werden.

Um festzustellen, ob $Z(t) = \emptyset$ gilt, werden folgende Schritte durchgeführt: In einer äußeren Schleife werden die Steuerungseingänge der Fahrzeuge V_2 und V_3 nach Theorem 1 gesetzt (siehe Alg. 1). Zudem wird die Steuersequenz der longitudinalen Bang-Bang Steuerung des Fahrzeuges V_1 festgelegt, z.B. zuerst beschleunigen und dann bremsen. Anschließend wird ein gültiger Zeitpunkt t_y mit Hilfe des Algorithmus 2 gesucht (siehe Zeile 4). Wird ein gültiger Wert t_y gefunden, so dass alle Nebenbedingungen \mathcal{C} erfüllt sind, kann die Suche entweder abgebrochen werden oder eine bessere Lösung im Sinne einer

Kostenfunktion gesucht werden. Wenn kein Startzeitpunkt t_y gefunden wird, so dass alle Nebenbedingungen erfüllt sind, gibt Algorithmus 2 die letztmögliche Ausweichtrajektorie $z_{V_1, \text{last}}(\cdot)$ des Fahrzeuges V_1 bezüglich dem Hindernis O_1 zurück. Anschließend wird das Intervall $[t_s, \bar{t}_s]$ nach folgender Richtlinie angepasst (siehe Zeile 8):

- Immer wenn $z_{V_1, \text{last}}(\cdot) = \emptyset$ gilt, dann existiert für die aktuelle longitudinale Steuertrajektorie $u_{V_1, x}(\cdot)$ keine Ausweichtrajektorie, die eine Kollision mit O_1 vermeidet und die Bremsphase der longitudinalen Steuertrajektorie wird erhöht (siehe Abb. 4a).
- Wenn $z_{V_1, \text{last}}(\cdot)$ nur Nebenbedingungen bezüglich Fahrzeug V_2/V_3 verletzt, wird die Zeitdauer der Bremsphase der longitudinalen Steuertrajektorie verkürzt/erhöht (siehe Abb. 4).
- Wenn $z_{V_1, \text{last}}(\cdot)$ Nebenbedingungen bezüglich den Fahrzeugkombinationen $\{V_2, O_1\}$, $\{V_2, V_3\}$ oder $\{V_2, V_3, O_1\}$ verletzt, existiert keine Lösung für die aktuelle longitudinale Steuersequenz.

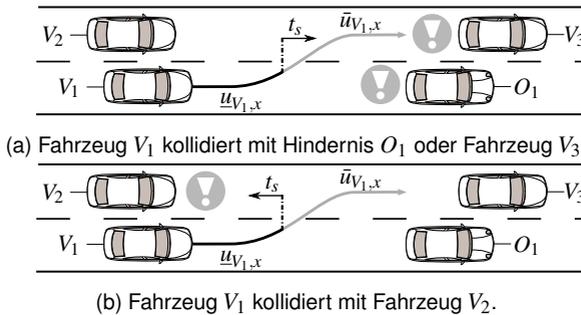


Abbildung 4: Anpassung von t_s .

Algorithmus 2 funktioniert wie folgt: Für eine gegebene longitudinale Steuertrajektorie $u_{V_1, x}(\cdot)$ des Fahrzeuges V_1 wird ein gültiger Startzeitpunkt t_y des lateralen Ausweichmanövers gesucht. Dazu wird das Intervall $[t_y, \bar{t}_y]$ durch folgende Richtlinie rekursiv angepasst (siehe Zeile 18):

- Immer wenn eine Kollision zwischen Fahrzeug V_1 und Hindernis O_1 stattfindet, muss Fahrzeug V_1 die Fahrspur früher wechseln $\bar{t}_y = t_y$ (siehe Abb. 5b).
- Andernfalls, wenn eine Kollision zwischen Fahrzeugen $\{V_1, V_2\}$, $\{V_1, V_3\}$ oder $\{V_1, V_2, V_3\}$ stattfindet, oder eine Endbedingung $a_i(\mathbf{z}(t_f), t_f)$ für

$i = 1, \dots, 4$ verletzt wird, muss Fahrzeug V_1 die Fahrspur später wechseln
 $\underline{t}_y = t_y$ (siehe Abb. 5a).

Algorithm 1 Berechnung von t_s

```

1: Initialisierung
2: while  $\neg \text{terminate} \wedge |\Delta t_s| > \varepsilon_s$  do
3:    $t_s = \frac{t_s + \bar{t}_s}{2}$ 
4:   Berechnung von  $t_y$ 
5:   if Startzeit  $t_y$  gefunden then
6:     terminate := true
7:   else
8:     Aktualisiere Intervall  $[\underline{t}_s, \bar{t}_s]$ 
9:   end if
10: end while

```

Algorithm 2 Berechnung von t_y

```

11: Initialisierung
12: while  $\neg \text{terminate} \wedge |\Delta t_y| > \varepsilon_y$  do
13:    $t_y = \frac{t_y + \bar{t}_y}{2}$ 
14:   Evaluierung von  $\mathcal{C}$ 
15:   if Startzeit  $t_y$  gefunden then
16:     terminate := true
17:   else
18:     Aktualisiere Intervall  $[\underline{t}_y, \bar{t}_y]$ 
19:   end if
20: end while

```

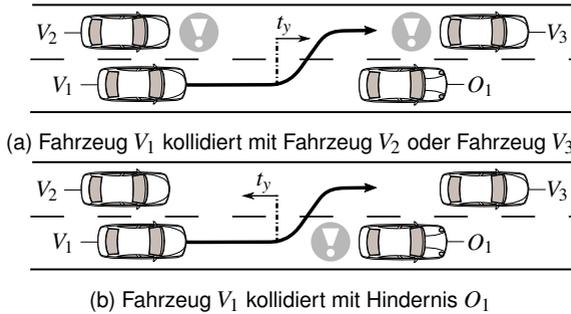


Abbildung 5: Anpassung von t_y .

Algorithmus 1 und 2 werden abgebrochen, falls der Betrag der Änderung des Wertes t_s und t_y , bezeichnet als Δt_s und Δt_y , zwischen zwei Iterationsschritten unter den benutzerdefinierten Schwellwert ε_s respektive ε_y fällt. Algorithmus 1 wird für jede mögliche longitudinale Bang-Bang Steuersequenz ausgeführt. Falls das Manöver-Template durchführbar ist, wird eine Referenztrajektorie $\mathbf{z}_{V_n}^*(\cdot)$ für jedes kooperative Fahrzeug ausgegeben. Wenn keine der möglichen Bang-Bang Steuersequenzen zu einer Lösung führt, wird angenommen, dass $\mathcal{Z}(t) = \emptyset$ gilt.

6 Bewegungsplanungsalgorithmus

Die Einbettung von Manöver-Templates in einem Bewegungsplaner wird beispielhaft für einen A*-Baumsuchalgorithmus basierend auf Bewegungsprimitiven gezeigt. Zu Beginn wird der prinzipielle Algorithmus ohne Einsatz von Manöver-Templates erläutert.

Bewegungsprimitive sind offline berechnete Trajektorien, die online kombiniert werden, um komplexe Bewegungen abzubilden [8, 13] (siehe Abb. 6). Ein sogenannter Manöverautomat kodiert welche Bewegungsprimitive verbunden werden können [8, 13]. Ein einzelnes Bewegungsprimitiv des n -ten Fahrzeuges wird als m_j^n bezeichnet und die Menge an möglichen nachfolgenden Bewegungsprimitiven von m_j^n wird als \mathcal{M}^S bezeichnet. Es wird angenommen, dass alle Bewegungsprimitive die selbe Zeitdauer Δt haben. Ein Knoten $\mathbf{m}_j = [m_j^1, \dots, m_j^N]$ der A*-Suche repräsentiert eine mögliche Kombination von Bewegungsprimitiven m_j^n von N kooperativen Fahrzeugen.

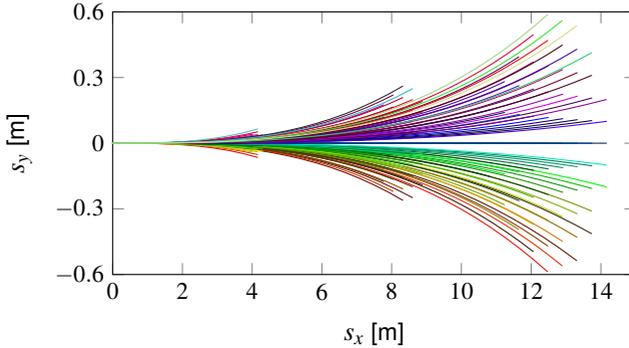


Abbildung 6: Bewegungsprimitive.

Die A*-Suche ist ähnlich zu [11], jedoch wird auf die Vorberechnung von Teilbäumen verzichtet. Die Kosten der Bewegungsprimitive \mathbf{m}_j sind

$$g(\mathbf{m}_j) = g_{\text{coll,MV}}(\mathbf{m}_j) + \sum_{n=1}^N g_{\text{SV}}(m_j^n), \quad (11)$$

$$g_{\text{SV}}(m_j^n) = g_{\text{coll,SV}}(m_j^n) + g_t(m_j^n) + g_\theta(m_j^n), \quad (12)$$

wobei $g_{\text{coll,MV}}(\mathbf{m}_j)$ Kollisionen zwischen kooperativen Fahrzeugen innerhalb der Trajektorien \mathbf{m}_j bewertet und $g_{\text{SV}}(m_j^n)$ beurteilt die Kosten, welche nur von der Handlung eines einzelnen Fahrzeuges abhängen. Hierbei bewertet

$g_{\text{coll,SV}}(m_j^n)$ Kollisionen zwischen einem einzelnen Fahrzeug und Hindernissen in der Umgebung und das Verlassen der Straße. Die Kostenterme $g_{\text{coll,MV}}(\mathbf{m}_j)$ und $g_{\text{coll,SV}}(m_j^n)$ nehmen hierbei den Wert ∞ an, falls eine Kollision oder das Verlassen der Straße stattfindet, ansonsten haben sie den Wert 0. Die Funktion $g_l(m_j^n)$ berechnet die Länge eines Bewegungsprimitives m_j^n und $g_\theta(m_j^n)$ wertet Abweichungen der Fahrzeugorientierung zur Orientierung des Straßenverlaufs. Die Gesamtkosten eines Knotens \mathbf{m}_j ergeben sich aus der Summe der akkumulierten Kosten 11 vom Startknoten zu \mathbf{m}_j und der nachfolgend vorgestellten Heuristik $h(\mathbf{m}_j)$.

Zur Berechnung der Heuristik $h(m_j^n)$ wird Knoten m_j^n einen Schritt expandiert und das Minimum über die Kosten aller Nachfolger bildet die Heuristik für Knoten m_j^n . Zur Berechnung der Heuristik des Knotens \mathbf{m}_j werden alle Werte $h(m_j^n)$ aufsummiert.

$$h(\mathbf{m}_j) = \sum_{n=1}^N h(m_j^n),$$

$$h(m_j^n) = \min_{m_i^n \in \mathcal{M}^S} g_{\text{SV}}(m_i^n).$$

Die Heuristik $h(\mathbf{m}_j)$ trägt somit zur frühzeitigen Erkennung unvermeidbarer Kollisionszustände bei.

Die Einbettung des Manöver-Templates *Kooperatives Einfädeln* geschieht in diesem Beitrag in zweierlei Hinsicht: Zum Einen wird ein zusätzlicher Kostenterm zu (12) hinzugefügt, zum Anderen wird der Suchbereich für Fahrzeug V_2 und V_3 auf Fahrspur 1 eingeschränkt (siehe Abb. 3). Der hinzukommende Kostenterm bestraft Abweichungen der Bewegungsprimitive m_j^n zur Referenztrajektorie $\mathbf{z}_{V_n}^*(\cdot)$:

$$g_T(m_j^n) = \max d(m_j^n, \mathbf{z}_{V_n}^*), \quad (13)$$

wobei $d(m_j^n, \mathbf{z}_{V_n}^*)$ die Euklidische Distanz zwischen zwei Trajektorien berechnet. Durch Hinzufügen des Kostenterms (13) findet der A*-Algorithmus nicht mehr die optimale Lösung im Sinne der ursprünglichen Kostenfunktion (11) und durch Eingrenzen des Suchbereiches der Fahrzeuge V_2 und V_3 ist der Algorithmus nicht mehr vollständig. Beide Maßnahmen haben allerdings in den untersuchten Szenarien zu einer Effizienzsteigerung geführt.

7 Evaluation

Zur Auswertung des vorgestellten Verfahrens werden 100 Verkehrssituationen nach Def. 2 erstellt. Hierbei werden die initialen Positionen und Geschwindigkeiten aller Fahrzeuge zufällig erzeugt. Da der Fokus auf Notfallsituationen

liegt, werden nur Szenarien ausgewählt, in denen ein Bremsmanöver keine Kollision zwischen Fahrzeug V_1 und Hindernis O_1 vermeidet. Die Menge an Verkehrsszenarien wird im Folgenden mit \mathcal{S} bezeichnet.

Die Bewegungsprimitive basieren auf Euler Spiralen [13] und die Menge an nachfolgenden Bewegungsprimitiven \mathcal{M}^S wird auf $|\mathcal{M}^S| \leq 12$ reduziert, wie in [4] präsentiert. Das Ziel ist es, bis zu einer Baumtiefe von 6, ein kollisionsfreies kooperatives Manöver zu planen.

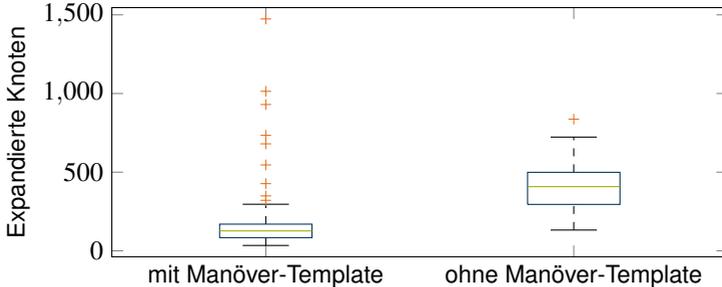


Abbildung 7: Vergleich der expandierten Knoten der A*-Suche mit und ohne Manöver-Templates in Szenarien $\mathcal{S}^{\text{both}}$.

Zuerst werden die expandierten Knoten der Szenarien $\mathcal{S}^{\text{both}} \subset \mathcal{S}$ verglichen, in denen mit und ohne Manöver-Template ein kollisionsfreies kooperatives Manöver gefunden wird. Die Menge $\mathcal{S}^{\text{both}}$ beinhaltet insgesamt 76 Szenarien. Wie in Abb. 7 dargestellt, verringert sich die durchschnittliche Anzahl (Median) an expandierten Knoten bei der Ausführung des Baumsuchalgorithmus mit Manöver-Template um $\approx 69\%$ zu der Anzahl an expandierten Knoten der Baumsuche ohne Manöver-Templates. Allerdings werden unterschiedliche Kostenfunktionen betrachtet, wie in Kap. 6 beschrieben.

Ansatzpunkte für weitere Forschung sind die Erstellung weiterer Manöver-Templates und die Bewertung durchführbarer Manöver-Templates, so dass das aussichtsreichste Manöver-Template an den Bewegungsplanungsalgorithmus weitergeleitet wird. Zum jetzigen Zeitpunkt ist dies noch nicht implementiert. Dies wirkt sich auf die Erfolgsrate des Bewegungsplaners mit Manöver-Templates gegenüber dem Bewegungsplaner ohne Manöver-Templates in den Szenarien $\mathcal{S}^T \subset \mathcal{S}$ aus, in denen Manöver-Template *Kooperatives Einfädeln* durchführbar ist. Auf Grund eines festen Timeouts für die Planung konnte der Bewegungsplaner mit Manöver-Template weniger Szenarien erfolgreich lösen, wobei die Erfolgsrate des Bewegungsplanungsalgorithmus in den Szenarien \mathcal{S}^T mit Manöver-Template bei 82% und ohne Manöver-Template bei

98% liegt. Ein Einfädeln des Fahrzeuges V_1 zwischen den Fahrzeugen V_2 und V_3 ist nach Manöver-Template *Kooperatives Einfädeln* möglich, jedoch weitaus komplizierter als das Einscheren des Fahrzeuges V_1 vor bzw. nach den Fahrzeugen V_2 und V_3 . Dieser Effekt kann zum Einen durch die Verwendung mehrerer Manöver-Templates und zum Anderen durch eine Bewertung der durchführbaren Manöver-Templates, wie in Kap. 3 beschrieben, verringert werden.

8 Schlussfolgerung

Dieser Beitrag präsentiert eine Methode basierend auf Manöver-Templates zur Reduzierung möglicher kooperativer Fahrstrategien. Manöver-Templates können mit verschiedenen Arten von Bewegungsplanungsalgorithmen kombiniert werden, um die Suche nach kooperativen Manövern einzugrenzen und effizienter zu gestalten. Zudem bieten Manöver-Templates das Potenzial Verhaltensentscheidungen in einer Gruppe kooperativer Fahrzeuge transparenter zu gestalten. Zukünftig soll untersucht werden, wie viele Manöver-Templates nötig sind, um den Großteil an Gefahrensituationen abzudecken. Zudem wird untersucht, inwiefern sich Optimierung zur Konstruktion neuer Manöver-Templates eignet.

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit im Rahmen des Schwerpunktprogramms SPP 1835 "Kooperativ Interagierende Automobile" (Förderkennzeichen: AL 1185/4-1).

Literatur

- [1] ALTHOFF, M. ; HESS, D. ; GAMBERT, F. : Road occupancy prediction of traffic participants. In: *16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2013, S. 99–105
- [2] ALTHOFF, M. ; LÖSCH, R. : Can Automated Road Vehicles Harmonize with Traffic Flow While Guaranteeing A Safe Distance? In: *Proc. of the 19th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2016, S. 485–491

- [3] AMOOZADEH, M. ; DENG, H. ; CHUAH, C.-N. ; ZHANG, H. M. ; GHOSAL, D. : Platoon management with cooperative adaptive cruise control enabled by VANET. In: *Vehicular Communications 2* (2015), Nr. 2, S. 110 – 123
- [4] BRANICKY, M. S. ; KNEPPER, R. A. ; KUFFNER, J. J.: Path and Trajectory Diversity: Theory and Algorithms. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008, S. 1359–1364
- [5] COLOMBO, A. ; DEL VECCHIO, D. : Efficient algorithms for collision avoidance at intersections. In: *Proc. of Hybrid Systems: Computation and Control*, 2012, S. 145–154
- [6] COLOMBO, A. ; DEL VECCHIO, D. : Least Restrictive Supervisors for Intersection Collision Avoidance: A Scheduling Approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60 (2015), Nr. 6, S. 1515–1527
- [7] FRASER-ANDREWS, G. : Finding candidate singular optimal controls: A state of the art survey. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 60 (1989), Nr. 2, S. 173–190
- [8] FRAZZOLI, E. ; DAHLEH, M. A. ; FERON, E. : Maneuver-based motion planning for nonlinear systems with symmetries. In: *IEEE Transactions on Robotics* 21 (2005), Nr. 6, S. 1077–1091
- [9] FRESE, C. : Cooperative Motion Planning using Branch and Bound Methods. In: BEYERER, J. (Hrsg.) ; HUBER, M. (Hrsg.): *Proc. of the 2009 Joint Workshop of Fraunhofer IOSB and Institute for Anthropomatics, Vision and Fusion Laboratory*, KIT Scientific Publishing, 2009, S. 187–201
- [10] FRESE, C. ; BATZ, T. ; BEYERER, J. : Kooperative Bewegungsplanung zur Unfallvermeidung im Straßenverkehr mit der Methode der elastischen Bänder. In: *Autonome Mobile Systeme*. Springer, 2009, S. 193–200
- [11] FRESE, C. ; BEYERER, J. : Planning Cooperative Motions of Cognitive Automobiles Using Tree Search Algorithms. In: DILLMANN, R. (Hrsg.) ; BEYERER, J. (Hrsg.) ; HANEBECK, U. D. (Hrsg.) ; SCHULTZ, T. (Hrsg.): *KI 2010: Advances in Artificial Intelligence* Bd. 6359. Karlsruhe : Springer, 2010 (Lecture Notes in Artificial Intelligence), S. 91–98
- [12] HARTL, R. F. ; SETHI, S. P. ; VICKSON, R. G.: A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. In: *SIAM review* 37 (1995), Nr. 2, S. 181–218

- [13] HESS, D. ; ALTHOFF, M. ; SATTEL, T. : Formal Verification of Maneuver Automata for Parameterized Motion Primitives. In: *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2014, S. 1474–1481
- [14] HULT, R. ; CAMPOS, G. R. ; FALCONE, P. ; WYMEERSCH, H. : An approximate solution to the optimal coordination problem for autonomous vehicles at intersections. In: *American Control Conference*, 2015, S. 763–768
- [15] KOWSHIK, H. ; CAVENEY, D. ; KUMAR, P. R.: Provable Systemwide Safety in Intelligent Intersections. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 60 (2011), Nr. 3, S. 804–818
- [16] LENZ, D. ; KESSLER, T. ; KNOLL, A. : Tactical cooperative planning for autonomous highway driving using Monte-Carlo Tree Search. In: *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, 2016, S. 447–453
- [17] MANZINGER, S. : *Efficient Cooperative Trajectory Planning of Automated Vehicles using Maneuver Templates*, Technische Universität München, Master's Thesis, 2016
- [18] PAPAGEORGIOU, M. ; LEIBOLD, M. ; BUSS, M. : *Optimierung*. Springer Berlin Heidelberg, 2012
- [19] SCHOUWENAARS, T. ; DE MOOR, B. ; FERON, E. ; HOW, J. : Mixed integer programming for multi-vehicle path planning. In: *European Control Conference IEEE*, 2001, S. 2603–2608
- [20] SEMSAR-KAZEROONI, E. ; PLOEG, J. : Interaction Protocols for Cooperative Merging and Lane Reduction Scenarios. In: *IEEE 18th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2015, S. 1964–1970
- [21] TOMAS-GABARRON, J. B. ; EGEA-LOPEZ, E. ; GARCIA-HARO, J. : Vehicular Trajectory Optimization for Cooperative Collision Avoidance at High Speeds. In: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 14 (2013), Nr. 4, S. 1930–1941
- [22] WILSON, B. H.: How soon to brake and how hard to brake: Unified analysis of the envelope of opportunity for rear-end collision warnings. In: *Proc. of 17th International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles* Bd. 47, 2001
- [23] ZHANG, H. ; GEIGER, A. ; URTASUN, R. : Understanding high-level semantics by modeling traffic patterns. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 2013, S. 3056–3063